随机控制视角下的现代投资组合优化与风险管理

唐钰淇

山东财经大学统计与数学学院，山东省济南市，250014；

摘要：金融市场日益增长的复杂性与不确定性对传统投资组合理论提出了严峻挑战。本文从金融数学的专业视角出发，系统梳理了随机控制理论在现代投资组合优化与风险管理中的核心应用框架。文章回顾了从经典 Merton 问题到随机波动率模型的理论演进脉络，深入分析动态规划原理与 HJB 方程在最优投资消费决策中的核心作用，重点探讨模型不确定性下的鲁棒投资策略、时间不一致性问题的均衡控制以及强化学习方法在动态资产配置中的创新应用。研究表明，随机控制框架通过处理市场状态切换、跳跃扩散过程及参数不确定性，能够更准确地刻画真实市场动态，为复杂环境下的投资决策提供严谨的数理基础。本文还讨论了高频数据环境下的风险管理挑战及未来研究方向。

关键词：随机控制；投资组合优化；HJB 方程；模型不确定性

DOI：10.64216/3080-1486.26.02.098

引言

金融数学作为一门交叉学科，其核心使命在于运用数学工具刻画金融市场的不确定性规律，并为投资决策与风险管理提供理论支撑。随机控制理论为处理动态决策问题提供了自然的数学语言。通过将投资组合问题建模为受随机过程驱动的控制问题，研究者能够在连续时间框架下求解最优交易策略。从 Merton 的开创性工作到当前的前沿探索，这一领域经历了深刻的理论拓展：从完全信息到模型不确定性，从时间一致到行为偏好的时间不一致性，从解析求解到机器学习数值方法。与此同时，高频交易的普及与人工智能技术的渗透正在重塑金融市场的微观结构，对风险管理的实时性与鲁棒性提出更高要求。本文旨在从金融数学的核心知识体系出发，系统阐述随机控制方法在投资组合优化与风险管理中的应用逻辑。

1 从 Merton 问题到随机波动率模型

1.1 经典 Merton 问题的框架与意义

连续时间金融学的奠基性工作可追溯至 Merton 在二十世纪六十年代末至七十年代初的一系列论文。Merton 考虑一个投资者在无限时间范围上配置财富于无风险资产与风险资产，并选择最优消费流以最大化期望贴现效用。在这个经典框架中，风险资产价格被假设遵循几何布朗运动，这意味着资产收益率服从对数正态分布，波动率为常数，且价格路径连续。投资者的财富动态变化由几个关键因素决定：无风险资产的利息收入、投资于风险资产的资本利得或损失，以及消费支出。投资者的目标是在整个生命期内平滑消费，使期望效用的贴现总和达到最大。当采用经济学中常用的常数相对风险厌恶效用函数时，Merton 通过动态规划方法求得显式解。这一解具有简洁而深刻的经济学含义：最优风险资产配置比例是一个常数，由风险溢价除以风险厌恶系数与方差乘积决定；最优消费率则是财富的线性函数。

1.2 随机波动率与跳跃扩散的拓展

金融市场中一个广为认知的现象是波动率并非恒定不变，而是呈现出时变性、聚集性和均值回复特征。所谓波动率聚集，指大波动之后往往跟随大波动，小波动之后跟随小波动；均值回复则意味着波动率围绕某个长期平均水平上下波动，不会持续偏离。为刻画这些特征，研究者发展了随机波动率模型，其中最具代表性的是 Heston 模型。在随机波动率框架下，资产价格本身和它的瞬时方差都被视为随机过程。方差过程通常被设定为均值回复形式，并受到另一个布朗运动的驱动，且这两个布朗运动之间存在相关性，以捕捉所谓的杠杆效应——即资产价格下跌时波动率上升的倾向。这一框架显然比常数波动率模型更贴近现实，但代价是数学处理变得异常复杂。投资组合优化问题不再具有解析解，需借助数值方法或渐近展开技术。研究发现，在随机波动率环境下，投资者不仅需要管理价格风险，还需要管理波动率风险，最优策略中包含对波动率变化的敏感度调整。

1.3 随机控制框架的数学本质

上述拓展本质上都是在扩大状态空间的维度。在经典 Merton 问题中，唯一的状态变量是投资者财富；而在随机波动率模型中，瞬时方差成为第二个状态变量；在跳跃扩散模型中，跳跃强度可能成为第三个状态变量，甚至这些变量本身也可能是随机的。这种多维状态空间的动态优化问题正是随机控制理论的核心研究对象。随机控制问题的标准形式是给定一组状态变量的随机动

态，决策者通过选择控制变量来最大化某个目标泛函。这一框架的强大之处在于其统一性：无论状态变量是一维还是多维，无论动态是扩散还是跳跃，无论目标是终端财富还是消费流，都可以纳入同一数学结构进行处理。这种统一性使得研究者能够将复杂多变的实际问题转化为标准形式，进而运用成熟的数学工具求解。

2 动态规划原理与 HJB 方程的核心作用

2.1 HJB 方程的推导与解释

随机控制问题的核心方法是动态规划原理，其基本思想可以概括为“最优决策具有时间一致性”。如果某个策略从初始时刻到终点是最优的，那么从中间任意时刻开始，该策略在剩余时间段上的部分相对于该时刻的状态也必然构成最优控制。这一直观而深刻的思想将整个时间区间上的优化问题分解为一系列相互关联的子问题。基于动态规划原理，可以推导出值函数所满足的偏微分方程，即哈密顿-雅可比-贝尔曼方程，通常简称为 HJB 方程。这个方程描述了值函数随时间的变化与当前决策之间的关系。方程中包含一个最大化运算，反映了决策者在每一时刻都要从可行集中选择最优控制。当找到使方程右侧达到最大的控制后，将其代入方程，就得到一个关于值函数的非线性偏微分方程。

2.2 验证定理与解的唯一性

在实际应用中，求解 HJB 方程通常遵循两条路径。第一条路径是“猜解再验证”：根据问题特点猜测值函数的形式，代入方程检验是否满足，并由此确定控制策略。这种方法适用于具有特殊结构的模型，如线性二次型问题或具有齐次性质的 Merton 问题。第二条路径是直接数值求解，适用于无法获得解析形式的复杂模型。无论采用哪种方法，都需要通过验证定理确认所得解确为原问题的最优值函数。验证定理的核心条件是值函数足够光滑，且满足特定的增长条件，以确保随机积分的良定义性和最优性。对于某些不满足光滑条件的问题，需要引入粘性解理论。粘性解将偏微分方程的解理解为满足特定不等式性质的连续函数，这一框架极大地拓展了随机控制理论的适用范围，使其能够处理带有边界条件或非光滑性的复杂问题。

2.3 数值求解方法

除少数特殊情况外，HJB 方程通常无法求得闭式解，需借助数值方法。传统方法包括有限差分法，通过离散时间、空间网格逼近偏微分算子，适用于低维问题。但对于高维状态空间，传统网格方法面临“维数灾难”，即计算量随维度指数增长，使得问题变得不可解。近年来，深度学习技术的引入为高维 HJB 方程的求解带来新突破。研究者利用神经网络逼近值函数，通过随机梯度下降训练网络参数，已在百维规模的期权定价与投资组合问题中取得良好效果。这种方法的核心思想是将偏微分方程的残差作为损失函数，在随机采样点上进行训练，从而避免了对整个状态空间进行网格剖分。

3 模型不确定性与鲁棒投资策略

3.1 模糊厌恶与稳健控制

经典随机控制框架假设投资者确切知道资产价格的动态参数，但现实中的参数估计不可避免地存在误差。更根本的问题是，投资者不仅面临已知分布下的风险，还面临模型本身是否正确的不确定性。行为经济学研究表明，人们对这种模糊性的厌恶程度往往超过对风险本身的厌恶。这一问题在数学上可以通过稳健控制理论形式化。其基本思想是，投资者不满足于在单一基准模型下寻求最优，而是考虑一组可能的备选模型，并追求在“最坏情况”下表现良好的策略。这种思路类似于工程控制中的鲁棒设计，但区别在于金融市场的备选模型通常通过概率测度变换生成，且对测度偏离施加惩罚以保持合理性。

3.2 时间不一致性与均衡控制

经典动态规划原理依赖于一个关键假设：决策者的偏好随时间推移保持一致。这意味着，如果某个策略在当前时刻被认为是最优的，那么在未来的任何时刻，从那个时刻的状态出发重新评估，该策略的后续部分仍然是最优的。然而，当投资者的贴现函数不是标准的指数形式，或者目标函数包含方差等非线性项时，这一假设不再成立。以连续时间均值-方差投资组合问题为例，投资者希望最大化终端财富的期望同时最小化其方差。这类目标函数在数学上具有时间不一致性，因为方差项依赖于整个路径的分布，而不是逐点可分的。解决这一问题的方法是将动态决策视为一个博弈过程：当前投资者无法约束未来自己的行为，因此只能寻求一种均衡策略，使得在任何时刻，投资者都没有动机单方面偏离既定计划。

3.3 强化学习方法的应用前景

强化学习作为机器学习的重要分支，通过智能体与环境交互试错学习最优策略，为处理模型未知或部分已知的动态决策问题提供新思路。在金融数学领域，深度强化学习已被用于投资组合优化、最优执行与做市策略等问题。与基于模型的随机控制相比，强化学习的优势在于无需准确知道市场动态，仅需从历史或模拟数据中学习。这对于那些难以用简单参数模型刻画的复杂市场环境尤其具有吸引力。例如，在高频交易中，市场微观结构的影响错综复杂，传统模型往往难以全面捕捉，而强化学习可以从海量订单流数据中自动提取有效特征。

4 高频环境下的风险管理挑战

4.1 高频数据的统计特征

随着电子化交易的普及，高频金融数据变得日益丰富。这类数据呈现出与低频数据截然不同的统计特征：采样时间间隔不规则、存在微观结构噪声、日内季节效应显著、跳跃频繁。这些特征对传统基于连续扩散过程的模型构成严峻挑战。所谓微观结构噪声，是指由于买卖价差、价格离散化、订单不平衡等因素导致的观测价格与真实价格之间的偏差。在极短时间尺度上，这种噪声可能主导价格变化的真实信号。实证研究表明，高频收益率分布具有尖峰厚尾特征，且自相关函数在极短时滞上呈现负值——这是买卖报价反弹效应的典型表现。波动率的估计在高频环境下成为一个微妙的问题。一方面，高频数据包含更多信息，理论上可以提高估计精度；另一方面，微观结构噪声的存在使得简单实现波动率估计产生严重偏差。为此，研究者发展了预平均法、小波去噪与已实现核估计等多种技术，试图在信号提取与噪声滤除之间取得平衡。

4.2 实时风险度量方法

在高频交易环境下，风险度量需在秒级甚至毫秒级完成更新。传统的 VaR 与 ES 计算方法通常基于日度数据，计算量较大，难以满足实时性要求。为此，研究者发展了基于极值理论的动态阈值模型、基于分位数回归的 CAViaR 方法以及基于神经网络的条件风险预测模型。高频风险管理的另一挑战是处理日内周期性。同一资产在开盘、收盘时段波动率显著高于午间时段，这种规律性变化需要通过季节调整或引入日内时间变量建模。多资产组合的风险度量还需考虑动态相关结构，在分钟级别上，资产间的相关系数可能随市场状态和波动率水平发生显著变化。此外，高频环境下的风险管理必须考虑流动性风险。在正常市场条件下，买卖价差较小，交易可以迅速完成；但在市场压力时期，流动性可能瞬间枯竭，导致无法以合理价格平仓。这种流动性风险在低频模型中往往被忽略，但对高频策略至关重要。

4.3 程序化交易的风险控制

程序化交易系统的广泛应用改变了市场微观结构，也引入了新型风险。算法缺陷可能引发闪电崩盘，高频做市策略可能在极端行情下产生巨额亏损。2010 年的美国股市闪电崩盘就是一个警示性案例：在短短几分钟内，道琼斯指数暴跌近千点，随后迅速反弹，许多算法交易者在这次事件中遭受重创。随机控制理论可用于设计具有风险约束的交易算法。例如，在做市策略中，交易者需要在库存风险与市场冲击之间寻求最优平衡：持有过多库存面临价格不利变动的风险，而频繁调整头寸则会产生交易成本。这一问题可以建模为随机控制问题，求解最优报价策略。监管层面，对程序化交易的风险控制提出更高要求，包括算法备案、断熔机制与压力测试。从金融数学视角看，这些监管要求可形式化为对交易策略的路径约束或尾部风险限制，需要在优化问题中显式纳入。这促使研究者发展带约束的随机控制方法，以及考虑极端情景的稳健优化技术。

5 结语

随机控制理论为现代投资组合优化与风险管理提供了严谨且灵活的数学框架。从经典 Merton 问题到随机波动率与跳跃扩散，从完全信息到模型不确定性，从时间一致到均衡控制，这一领域持续吸收新的数学工具与实际需求，不断拓展理论边界。当前，人工智能技术与高频数据的深度融合正在推动金融数学进入新阶段：机器学习方法为高维复杂模型的求解提供可行路径，而对模型鲁棒性与可解释性的追求则呼唤更深层次的理论创新。对于金融数学专业的学习者而言，掌握随机控制的核心思想与方法，既是理解现代定量金融理论的基石，也是应对未来市场挑战的必要准备。这一领域的持续发展将依赖于数学、金融学与计算机科学的深度交叉，期待更多年轻学者投身其中，共同推动学科的前沿探索。在不确定性日益增加的金融市场中，随机控制理论将继续为理性决策提供科学依据，为风险管理构筑数学屏障。

参考文献

[1] 清华大学经济管理学院. 金融数学与精算研讨会举办[EB/OL]. (2025-10-31).

[2] 中国优选法统筹法与经济数学研究会. 第八届（2026）量化金融与保险分会学术年会通知[EB/OL]. (2026-01-17).

[3] Liang Z X, Liu Y, Zhang L T. A framework of state-dependent utility optimisation with general benchmarks[J]. Finance and Stochastics, 2025, 29(2): 469-518.

[4] Ann Oper Res. Complexity, nonlinearity and high frequency financial data modeling: lessons from computational approaches[J]. 2025, 352: 353-358.

[5] Mamun S A, Hossain R, Rahman M J, et al. Bayesian modeling for uncertainty management in financial risk forecasting and compliance[R]. NEP: New Economics Papers, 2025.